

APPLIED MATHEMATICS-III

Time : 2:30 Hours

Maximum Marks : 50

NOTES:

- Attempt all questions
- Students are advised to specially check the Numerical Data of question paper in both versions. If there is any difference in Hindi Translation of any question, the students should answer the question according to the English version.
- Use of Pager and Mobile Phone by the students is not allowed

Q1) Answer any ten parts of the following, from parts a to e select the correct choice

[10 × 1 = 10]

a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ then

- $AB = 0, BA = 0$
- $AB = 0, BA \neq 0$
- $AB \neq 0, BA = 0$
- $AB \neq 0, BA \neq 0$

b) The value of $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^3 x dx$ equals

- $\frac{2}{15}$
- $\frac{2}{25}$
- $\frac{2}{35}$
- None of these

c) One card is drawn from a pack of 52 playing cards. The probability that it is the card of a king or spade is

- $\frac{1}{26}$
- $\frac{1}{13}$
- $\frac{4}{13}$
- $\frac{3}{13}$

d) If $u = f(y/x)$ then $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} =$

- 2
- 1
- 0
- 1

e) The degree and order of the differential equation $\frac{d^2 y}{dx^2} + \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{3/2} = 0$

- $\frac{3}{2}, 2$
- 2, $\frac{3}{2}$
- 2, 2
- None of these

f) Solve the equation $(1-x)dy - (3+y)dx = 0$.

g) If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, find $\text{grad } r$.

h) If $x = u^2 - v$ and $y = u^2 + v$, find the value of $J \left(\frac{x, y}{u, v} \right)$

i) Evaluate $\int_0^1 \int_0^2 (x+y) dx dy$.

j) Write the mean and variance of Binomial distribution

k) Find $L \{e^{2t} \cos 3t + 4t^2\}$

l) If $u = \log(y \sin x + x \sin y)$, find $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

Q2) Answer any five parts of the following :

a) Verify that $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ is orthogonal.

b) If $u = x \sin^{-1}(y/x)$ then prove that $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$.

c) Find Laplace transform of $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right), & x > \pi/3 \\ 0, & x < \pi/3 \end{cases}$.

d) Solve $\frac{d^3 y}{dx^3} - 3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0$.

e) Find unit normal vector \hat{n} of the cone of revolution $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ at the point $P(1, 0, 2)$.

f) Write formula for Fourier series in the interval $0 < x < \pi$.

g) Criticise the following statement : The mean of a Poisson distribution is 5 while the standard deviation is 4.

[2 × 5 = 10]

Q3) Answer any two parts of the following :

a) Find the characteristic equation of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Show that the equation is satisfied by A and hence find A^{-1} .

b) Show that the field defined by $A = (x^2 + xy^2)i + (y^2 + x^2y)j$ is irrotational. Find its scalar potential.

c) Solve $(D^2 - 2D + 1)y = x \sin x$.

Q4) Answer any two parts of the following :

[2 × 5 = 10]

a) Evaluate $\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx$.

b) Examine whether the following equations are consistent.

$$2x + 6y + 11 = 0$$

$$6x + 20y - 6z + 3 = 0$$

$$6y - 18z + 1 = 0$$

c) Solve $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}(e^x - e^y)$.

Q5) Answer any two parts of the following :

[2 × 5 = 10]

a) The probability that a man aged 50 years will die within a year is 0.01125. What is the probability that out of 12 such men atleast 11 will reach their fifty first birthday.

b) Find the Fourier series for the following function :

$$f(x) = x, -\pi < x < \pi.$$

c) If $u = f(y-z, z-x, x-y)$ then prove that $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

(हिन्दी अनुवाद)

नोट : i) सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

- ii) परीक्षार्थियों को सलाह दी जाती है कि वे प्रश्न-पत्र के दोनों अनुवादों में संरक्षकीय अंकनों का विशेष रूप से ध्यान कर लें। यदि हिन्दी अनुवाद के किसी प्रश्न में किसी प्रकार की भिन्नता है, तो परीक्षार्थी अंग्रेजी अनुवाद के अनुसार प्रश्न का उत्तर दें।
- iii) परीक्षार्थियों द्वारा पेजर और मोबाइल फोन का प्रयोग अनुमत्य नहीं है।

प्र. 1) निम्नलिखित में से कोई दस भाग हल कीजिये। भाग अ से य तक सही विकल्प चुनिये।

[10×1=10]

अ) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ तो

- i) $AB=0=BA$ ii) $AB \neq 0, BA=0$
iii) $AB=0, BA \neq 0$ iv) $AB \neq 0, BA \neq 0$

ब) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^3 x dx$ का मान है -

- i) $\frac{2}{15}$ ii) $\frac{2}{25}$
iii) $\frac{2}{35}$ iv) इनमें से कोई नहीं

स) 52 पत्ते की ताश की गड्डी से एक ताश का पत्ता निकाला जाता है। पत्ते के राजा या हुकुम का पत्ता होने की प्रायिकता है :-

- i) $\frac{1}{26}$ ii) $\frac{3}{26}$
iii) $\frac{4}{13}$ iv) $\frac{3}{13}$

द) यदि $u = f(y/x)$ तो $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} =$

- i) 2 ii) 1
iii) 0 iv) -1

घ) अवकल समीकरण $\frac{d^2 y}{dx^2} + \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{3/2} = 0$ की घात तथा कोटि है :-

- i) $\frac{3}{2}, 2$ ii) $2, \frac{3}{2}$
iii) 2, 2 iv) इनमें से कोई नहीं

र) हल कीजिये $(1-x)dy - (3+y)dx = 0$

स) यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\text{grad } r$ का मान ज्ञात कीजिये।

व) यदि $x = u^2 - v$ तथा $y = u^2 + v$, तो $J \left(\frac{x, y}{u, v} \right)$ का मान ज्ञात कीजिये।

त) $\int_0^2 \int_0^2 (x+y) dx dy$ का मान ज्ञात कीजिये।

थ) द्विपद बंटन (Binomial Distribution) का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिये।

द) $L\{e^{2t} \cos 3t + 4t^2\}$ का मान ज्ञात कीजिये।

ध) यदि $u = \log(y \sin x + x \sin y)$ तो $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ का मान ज्ञात कीजिये।

प्र.2) निम्नलिखित में से कोई पाँच हल कीजिये।

अ) सिद्ध कीजिये $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ लाम्बिक है।

ब) यदि $u = x \sin^{-1}(y/x)$ तो सिद्ध कीजिये $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$.

स) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right), & x > \frac{\pi}{3} \\ 0, & x < \frac{\pi}{3} \end{cases}$ का लाप्लास रूपांतरण ज्ञात कीजिये।

द) हल कीजिए $\frac{d^3 y}{dx^3} - 3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0$.

घ) परिक्रमण शंकु $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ के बिन्दु $P(1, 0, 2)$ पर अभिलम्ब की दिशा में ईकाई सदिश ज्ञात कीजिये।

र) फूरिये श्रेणी (Fourier series) का अंतराल $0 < x < \pi$ में सूत्र लिखिये।

ल) निम्न कथन की विवेचना कीजिये। "प्वार्सों बंटन (Poisson distribution) का माध्य 5 है तथा मानक विचलन 4 है"।

[2×5=10]

प्र.3) निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिये।

अ) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ की अभिलाक्षिक समीकरण ज्ञात कीजिये। दर्शाईये कि आव्यूह A समीकरण को संतुष्ट करता है तथा A^{-1} ज्ञात कीजिये।

ब) सिद्ध करो कि निम्न क्षेत्र अधूर्ण है $A = (x^2 + xy^2)i + (y^2 + x^2y)j$ इसका अदिश विभव भी ज्ञात कीजिये।

स) हल कीजिये $(D^2 - 2D + 1)y = x \sin x$.

[2×5=10]

प्र.4) निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिये।

अ) $\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx$ का मान ज्ञात कीजिये।

ब) निम्न समीकरण निकाय के संगत होने की जाँच कीजिये।

$$2x + 6y + 11 = 0$$

$$6x + 20y - 6z + 3 = 0$$

$$6y - 18z + 1 = 0$$

स) हल कीजिये $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}(e^x - e^y)$.

[2×5=10]

प्र.5) निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिये।

अ) एक 50 वर्षीय व्यक्ति की एक वर्ष के भीतर मृत्यु होने की प्रायिकता 0.01125 है। बारह ऐसे व्यक्तियों में से कम से कम ग्यारह के 51 वें जन्मदिन मराने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये।

ब) निम्न फलन की फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिये $f(x) = x, -\pi < x < \pi$.

स) यदि $u = f(y-z, z-x, x-y)$ तो सिद्ध कीजिये $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

